

超限チョコ (Transfinite Chomp) ゲーム

神戸大学大学院システム情報学研究科システム情報学専攻

林 佑亮 (Yusuke HAYASHI) *

概要

Chomp と呼ばれる組み合わせゲームがある。これは先手と後手のどちらに必勝戦略があるかはわかるが、具体的な必勝戦略の構成が困難であるゲームの一例として知られている。近年この Chomp の盤面を無限の長さに拡張したゲームが考えられ、この拡張によって Chomp に関する興味深い構造が明らかとなっている。本講演ではこの構造について、講演者が証明した 2 つの事実を紹介する。

1 導入

自然数 $m, n > 0$ に対して、 $m \times n$ -chomp とは二人のプレイヤーが行う以下のゲームである：

- チョコ板とは直積集合 $X_0 = \{0, 1, \dots, m-1\} \times \{0, 1, \dots, n-1\}$ のこととし、 n ターン目時点での盤面を $X_n \subseteq X_0$ で表す。
- 各プレイヤーは交互にプレイする、各 $(n+1)$ ターン目において、 $(k, \ell) \in X_n$ を選んで $X_{n+1} = X_n \setminus (k, m-1] \times (\ell, n-1]$ とする (チョコを食べる)。
- 敗北条件は、 $(0, 0)$ (毒チョコ) を食べることである。

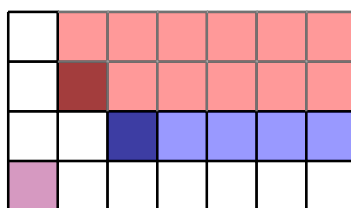


図 1 7×4 -chomp において、先手 (赤) が $(1, 2)$ 、後手が $(2, 1)$ を順にプレイした様子。紫のマス $((0, 0))$ が毒チョコのマスであり、このマスと白いマスを含めた範囲が集合 X_2 と対応している。

Chomp の必勝戦略については以下の古典的な結果が知られている。

定理 1.1. 自然数 $m, n > 0$ に対して、 $m \times n$ -chomp が先手必勝であることと $(m, n) \neq (1, 1)$ は同値である。

* 219x504x@stu.kobe-u.ac.jp

興味深いことに、これは具体的な必勝戦略を構成することなく証明されるものであり、実際、一般的な必勝戦略については現在も未解明な部分が多い。

近年になって、この Chomp を一般化した Transfinite Chomp が Huddleston Scott と Shurman Jerry[1] によって考えられた。順序数 $\alpha, \beta \neq 0$ に対して $\alpha \times \beta$ -Chomp とは、直積集合 $\alpha \times \beta$ に関して行う Chomp である。ただしここで、順序数 α は一般に $\alpha = \{\gamma \mid \gamma < \alpha\}$ という集合の構造を取るため、直積集合は $\alpha \times \beta = \{0, 1, \dots, \gamma(< \alpha), \dots\} \times \{0, 1, \dots, \delta(< \beta), \dots\}$ という構造を成す。この意味でこのゲームは有限の Chomp の自然な拡張となっている。

順序数が整列集合であることを利用すると、以下の帰結が得られる。

命題 1.2. 任意の順序数 $\alpha, \beta > 0$ に対して、 $\alpha \times \beta$ -chomp は有限手数で終了する。

すなわち、このゲームは一般に無限の大きさの盤面でプレイされるのにもかかわらず、プレイを無限回続けることができない。さらに言えば、このことから一般化された chomp に対しても、有限の場合と同様にどちらか片方に必ず必勝戦略が存在することがわかる。

この拡張によって、Chomp に新たな構造を見出すことができる。具体的には、次の定理が知られている。

定理 1.3. 任意の順序数 $\alpha > 0$ に対して、 $\alpha \times \beta_\alpha$ -Chomp が後手必勝になるような β_α が一意的に存在する、

この定理によって、順序数関数 f を $f(\alpha) = \beta_\alpha$ として定めることができる。この f について現在知られている値は

- $f(1) = 1$
- $f(2) = \omega$
- $f(3) = \omega^\omega$
- $f(\omega) = 2$
- $f(\omega^\omega) = 3$

のみである。

2 主定理

発表者は以下の 2 つの定理を証明した。

命題 2.1. 任意の非可算基数 κ に対して、 $f \upharpoonright \kappa$ は κ から κ への全単射である。

命題 2.2. ω_1 を最小の非可測順序数とする。ここで、 $\text{Suc}_{\omega_1} = \{\alpha < \omega_1 \mid \alpha \text{ は後続順序数}\}$, $\text{Lim}_{\omega_1} = \{\alpha < \omega_1 \mid \alpha \text{ は極限順序数}\}$ とすると、 $f^{-1}(\text{Suc}_{\omega_1})$ と $f^{-1}(\text{Lim}_{\omega_1})$ のいずれか片方は club を含み、

$$f^{-1}(\text{Suc}_{\omega_1}) \text{ が club を含む} \iff f(\omega_1) \text{ は後続順序数}$$

が成り立つ。

club を含む, というのは大雑把に言えば「 ω_1 の部分集合として “大きい” ことを意味しており, 標語的には「 ω_1 での f の値が極限順序数であるか, 後続順序数であるかはその下での f の値の多数決で決まっている」というように捉えることができる.

先行研究が f の個別の値を調査するものであったのに対して, この 2 つの結果は f の大域的な性質を明らかにしたものである. また, 命題 2.2 は集合論において典型的な現象である「反映性」の 1 つとして理解することができ, このような観点からも興味深いものである.

参考文献

- [1] Scott Huddleston and Jerry Shurman. Transfinite chomp. In *More Games of No Chance, Proc. MSRI Workshop on Combinatorial Games*, pp. 183–212, 2000.